Gerardo M.
Sarria M.

Bases Formales de la Computación

Gerardo M. Sarria M.

Pontificia Universidad Javeriana

4 de octubre de 2008

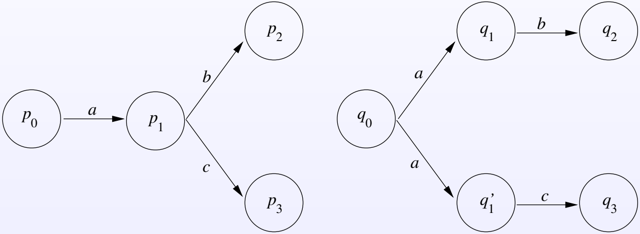
Gerardo M.
Sarria M.

RELACIONES DE SIMULACIÓN

El Problema con la Teoría de Autómatas Clásica

Gerardo M.
Sarria M.

Dados los siguientes autómatas:



La teoría permite deducir que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. De ahí que los estados p_0 y q_0 son equivalentes.

Necesitamos equivalencias más fuertes que no validen lo anterior.

Gerardo M.
Sarria M.

Relaciones de Simulación y Bisimulación Fuerte

Los sistemas de transiciones son solo automatas en los cuales los estados inicial y final son irrelevantes.

Simulación Fuerte

Sea T un sistema de transición. Una relación $R \subseteq S(T) \times S(T)$ es una simulación fuerte si y solo si para cada $(p, q) \in R$:

$$\text{si } p \xrightarrow{a} p' \text{ entonces existe } q' \text{ tal que } q \xrightarrow{a} q' \text{ y } (p', q') \in R.$$

Bisimulación Fuerte

Una relación R es una bisimulación fuerte si y solo si R y su *inversa* R^{-1} son ambas simulaciones.

Gerardo M.
Sarria M.

Similaridad y Bisimilaridad Fuerte

Similaridad

Decimos que p simula fuertemente a q si y solo si existe una *simulación* R tal que $(p,q) \in R$.

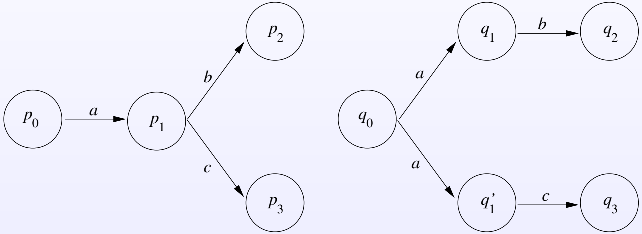
Bisimilaridad

Decimos que p y q son fuertemente bisimilares, escrito $p \sim q$, si existe una *bisimulación* R tal que $(p,q) \in R$.

Si p simula a q y q simula a p, entonces ¿p y q son bisimilares?

Similaridad y Bisimilaridad Fuerte

Ejemplo:



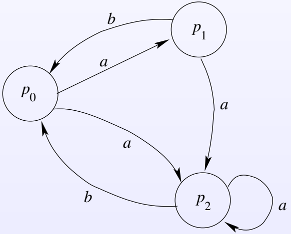
Aquí p_0 simula a q_0 mediante la relación:

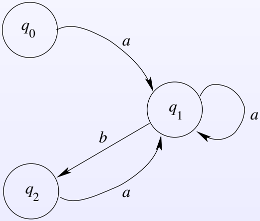
$$R = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1', p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)\}$$

pero q_0 no simula a p_0. Por lo tanto p_0 y q_0 no son bisimilares.

Gerardo M. Sarria M.

Ejemplo:

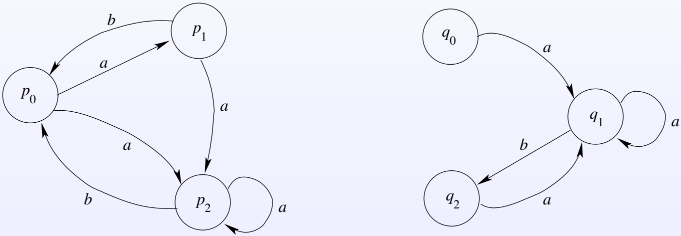




¿Cómo probamos que p_0 y q_0 son bisimilares?

Similaridad y Bisimilaridad Fuerte

Ejemplo:



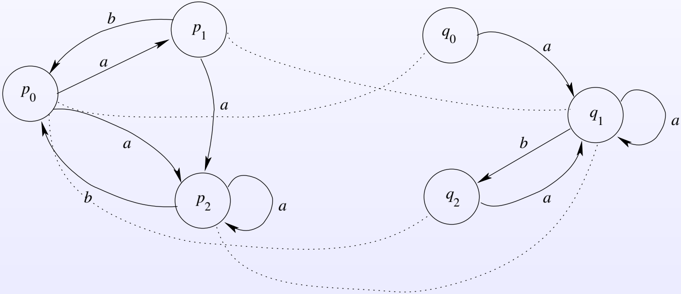
Definimos la relación:

$$R = \{(p_0, q_0), (p_0, q_2), (p_1, q_1), (p_2, q_1)\}$$

y probamos que R es una bisimulación.

Similaridad y Bisimilaridad Fuerte

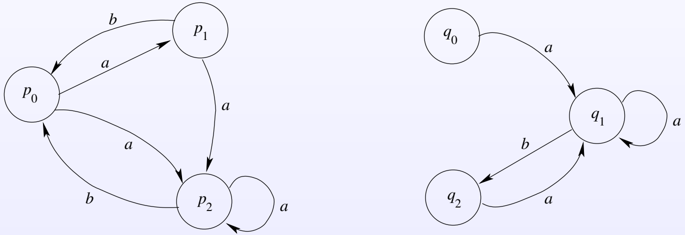
Ejemplo:



Gráficamente enlazamos los estados relacionados en el grafo.

Gerardo M. Sarria M.

Ejercicio



$$R = \{(p_0, q_0), (p_0, q_2), (p_1, q_1), (p_2, q_1)\}$$

Pruebe que R es una simulación fuerte y luego escriba R^{-1} y muestre que también es una simulación fuerte.

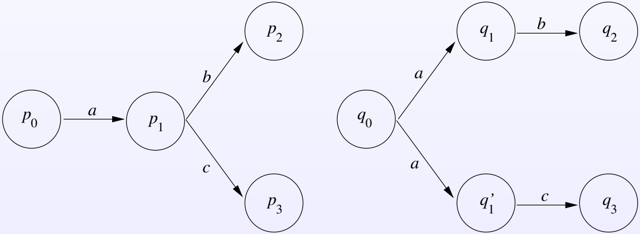
Bisimilaridad en CCS

El sistema de transición etiquetado de CCS tiene $\mathcal{P}$ como sus estados y sus transiciones, dados por la semántica operacional.

Decimos que $P \sim Q$ si y solo si los estados correspondientes a P y Q son bisimilares.

Bisimilaridad en CCS

Ejemplo:



$P = a.(b.0 + c.0)$ corresponde a p_0 y $Q = a.b.0 + a.c.0$ corresponde a q_0. Por lo tanto, $P \not\sim Q$.

Bisimilaridad en CCS

Algunas bisimilaridades básicas:

- $P \parallel Q \sim Q \parallel P$
- $P \parallel 0 \sim P$
- $(P \parallel Q) \parallel R \sim P \parallel (Q \parallel R)$
- $(\nu a)0 \sim 0$
- $P \parallel (\nu a)Q \sim (\nu a)(P \parallel Q)$
- $(\nu a)P \sim (\nu b)P[b/a]$

Congruencia en CCS

Suponga que $P \sim Q$. Quisieramos que $P \parallel R \sim Q \parallel R$.

De manera más general, quisieramos que

$$C[P] \sim C[Q]$$

donde $C[\cdot]$ es un contexto de proceso.

Queremos que $\sim$ sea una congruencia.

Congruencia en CCS

En principio, P y Q deben ser equivalentes si y solo si otro proceso (el ambiente, un observador) no puede observar alguna diferencia den sus comportamientos.

Note que $\tau.P \nsim P$, aunque τ es una acción no observable. Así que $\sim$ tal vez es muy fuerte.

Buscamos otra noción de equivalencia enfocada en términos de acciones observables.

Observaciones

Pensamos cualquier acción $\xrightarrow{a}$ $(a \neq \tau)$ como una observación.

Decimos que e es un experimiento si e es una secuencia $a_1.a_2 \ldots a_n$ de acciones observables.

Si $s = \alpha_1 \ldots \alpha_n \in Act^*$, entonces

$$\stackrel{s}{\Longrightarrow} = (\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{\alpha_1} (\xrightarrow{\tau})^* \ldots (\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{\alpha_n} (\xrightarrow{\tau})^*$$

Bisimilaridad Débil

Bisimulación Débil

Una relación binaria (y simétrica) R sobre procesos es una **bisimulación débil** si y solo si para cada $(P, Q) \in R$

si $P \stackrel{e}{\Longrightarrow} P'$ entonces existe Q' tal que $Q \stackrel{e}{\Longrightarrow} Q'$ y $(P', Q') \in R$.

P y Q son **débilmente bisimilares**, escrito $P \approx Q$, si y solo si existe una bisimulación débil que contiene la pareja (P, Q).

Bisimilaridad Débil

Ejemplos:

- $P \approx \tau.P$
- $a.0 + b.0 \not\approx a.0 + \tau.b.0$
- $a.(b.c.0 + b.d.0 \not\approx a.b.c.0 + a.b.d.0$
- $a.0 + b.0 \not\approx (\nu c)(c.0 \parallel \overline{c}.a.0 \parallel \overline{c}.b.0)$

Gerardo M. Sarria M.

Ejemplo: Lotería

Construir una máquina de lotería L que escoja aleatoriamente un "balota" del conjunto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ y cuando hay sacado una balota (acción observable) repita el proceso.

Usando τ para representar la escogencia interna, se puede especificar el comportamiento de la lotería como el proceso:

$$Lotspec \stackrel{\text{def}}{=} \tau.b_1.Lotspec + \ldots + \tau.b_n.Lotspec$$

Se asume que se puede escoger repetidamente la misma balota, y que continua indefinidamente.

Ejemplo: Lotería

Construir una máquina de lotería L que escoja aleatoriamente un "balota" del conjunto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ y cuando hay sacado una balota (acción observable) repita el proceso.

Usando τ para representar la escogencia interna, se puede especificar el comportamiento de la lotería como el proceso:

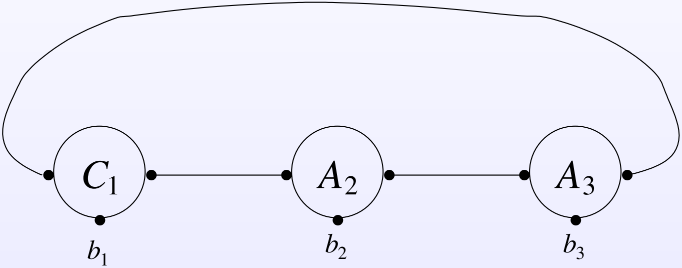
$$Lotspec \stackrel{\text{def}}{=} \tau.b_1.Lotspec + \ldots + \tau.b_n.Lotspec$$

Se asume que se puede escoger repetidamente la misma balota, y que continua indefinidamente.

¿Podemos construir loterías para un n arbitrario a partir de un conjunto fijo de componentes?

Ejemplo: Lotería

Para $n = 3$:



$$A \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a}.C, \quad C \stackrel{\text{def}}{=} \tau.C + c.A, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} b.C$$

Gerardo M.
Sarria M.

Ejemplo: Lotería

Los tres estados de la lotaria están definidos por:

$$L_1 = (\nu a_1 a_2 a_3)(C_1 \parallel A_2 \parallel A_3)$$
$$L_2 = (\nu a_1 a_2 a_3)(A_1 \parallel C_2 \parallel A_3)$$
$$L_3 = (\nu a_1 a_2 a_3)(A_1 \parallel A_2 \parallel C_3)$$

La lotería puede repetirse indefinidamente entre L_1, L_2 y L_3

pero puede, en algún momento, alcanzar un estado en el cual una balota particular b_i tenga que ser tomada (una acción observable).

Ejemplo: Lotería

Como de aquí es posible alcanzar estados estables como $L_1' = (\nu a_1 a_2 a_3)(B_1 \parallel A_2 \parallel A_3)$ (cuando está listo para tomar la balota b_1), el grafo de transiciones es:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
L_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right] & L_2 \arrow[r] \arrow[d, shift right] & L_3 \arrow[ll, bend right] \arrow[d, shift right] \\
L'_1 \arrow[u, bend right, "b_1"'] & L'_2 \arrow[u, bend right, "b_2"'] & L'_3 \arrow[u, bend right, "b_3"']
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: Lotería

Ejercicio:

Probar que $L_1 \approx Lotspec$.

Ejemplo: Lotería

Ejercicio:
Probar que $L_1 \approx Lotspec$.

Ayuda: Prueba que

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(L_i, Lotspec) | 1 \le i \le n\} \cup \{(L'_i, b_i.Lotspec) | 1 \le i \le n\}$$

es una bisimulación débil.

Fin de la Presentación