BASES FORMALES DE LA COMPUTACIÓN

JUAN CARLOS MARTÍNEZ ARIAS

A Hidden Markov Model of credit quality

Malgorzata W. Korolkiewicz, Robert J. Elliott

A Hidden Markov Model of credit quality

Se presenta un modelo oculto de Markov de calidad crediticia dinámica, y resalta la utilización de métodos de estimación basado en filtrado para los modelos de este tipo.

Se realiza el supuesto de que la cadena de Markov rigiendo la «verdad» de la evolución de la calidad de crédito, está oculto en «Ruidosas» o incompletas observaciones representadas por la publicación de las puntuaciones del crédito.

Los Parámetros del modelo, llamados, probabilidades de transición de crédito, se calculan utilizando el **algoritmo EM**. Los métodos de Filtrado proporcionan actualizaciones recursivas de estimaciones óptimas de modo que el modelo es "auto-calibrable".

A Hidden Markov Model of credit quality

La calificación de los prestatarios esta encaminada a dar información cuantitativa y cualitativa sobre la calidad de crédito del prestatario.

Después de la asignación inicial de la calificación crediticia, los exámenes se realizan periódicamente o bien sobre la base de los acontecimientos del mercado. → Puede resultar en un cambio de calificación que significa una mejora (**upgrade**) o deterioro (**downgrade**) en la solvencia del prestatario.

La eficiencia de las clasificaciones de crédito esta dada como indicadores de calidad crediticia y en modelos dinámicos. Esta dinámica se suelen resumir en una matriz de transición, donde cada entrada representa una probabilidad a partir de la migración de una clase de calificación crediticia a otra. → se debe asegurar que las estimaciones de las probabilidades de transición estén actualizadas y sean precisas.

A Hidden Markov Model of credit quality

Appendix A. Standard & Poor's transition matrix with *NR*

Source: Table 3 in Lando and Skødeberg (2002). The one-year transition matrix estimated from continuous data over the period 1988–1998.

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.900	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000
AA	0.064	0.879	0.013	0.002	0.001	0.002	0.000	0.000	0.000
A	0.009	0.076	0.894	0.048	0.009	0.002	0.005	0.000	0.000
BBB	0.001	0.006	0.044	0.848	0.087	0.008	0.002	0.000	0.001
BB	0.002	0.001	0.005	0.039	0.730	0.064	0.022	0.000	0.001
B	0.000	0.000	0.001	0.006	0.061	0.673	0.067	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.001	0.008	0.053	0.382	0.000	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.044	0.376	1.000	0.004
NR	0.025	0.032	0.042	0.055	0.097	0.152	0.143	0.000	0.994

Parece natural considerar una representación de la cadena de Markov para la calificación crediticia dinámica.

Las propiedades de Markov implican entonces que el proceso de calificación no debería tener memoria de su comportamiento pasado, entonces las predicciones hechas sobre la base de la valoración actual son tan buenas como las predicciones sobre la base de toda la historia de las puntuaciones.

A Hidden Markov Model of credit quality

Sin embargo, los efectos no-Markov de calificación en las transiciones, en forma de "calificación de momento" o "tendencia de calificación" para versiones anteriores, existen. Es decir, que las calificaciones crediticias no reflejan plenamente la información disponible.

Se busca entonces evitar las reversiones de calificación, buscando promover una mayor estabilidad en la calificación.

En este trabajo, se propone un modelo oculto de Markov (HMM), de calidad crediticia dinámica que tiene en cuenta que las clasificaciones de crédito publicadas no siempre reflejan con exactitud la "verdadera" solvencia.

A Hidden Markov Model of credit quality

Se Supone que la «verdad» de la evolución de la calidad de crédito puede ser descrita por una cadena de Markov, pero lo que hacen es no observar esta cadena de Markov directamente. El modelo está formulado en tiempo discreto, con una cadena de Markov de "verdadera" calidad crediticia observada con el proceso **martingale**.

El modelo produce una distribución de probabilidad de la «verdadera» calidad del crédito, dada la historia de las calificaciones crediticias, así como las estimaciones de parámetros, a saber, las probabilidades de transición.

No sólo se obtienen las estimaciones de las probabilidades de transición para la cadena de Markov de "verdadera" calidad de crédito, sino también las probabilidades de que una calificación particular se de para cada nivel de "verdadera" calidad de crédito.

A Hidden Markov Model of credit quality

Con el enfoque de filtración, los parámetros son fácilmente estimados por una versión de filtrado del algoritmo EM y los métodos de probabilidad de referencia que simplifican enormemente los cálculos. El algoritmo EM tiene el atractivo de que la propiedad de la <u>función probabilística es siempre la mejor después de cada iteración</u>.

El procedimiento basado en filtro EM mantiene bien establecida las propiedades estadísticas del algoritmo EM, mientras reduce los costos de memoria y, por tanto, permite mas rapidez en el cálculo.

A Hidden Markov Model of credit quality

Algoritmo EM (Expectation Maximization – Max. de Esperanza**)**

Presenta una técnica iterativa general para realizar una estimación de máxima verosimilitud de parámetros de problemas en los que existen ciertos *datos ocultos*.

El algoritmo EM puede aplicarse en muchas situaciones en las que se desea estimar un conjunto de parámetros θ que describen una distribución de probabilidad subyacente, dada únicamente una parte observada de los datos completos producidos por la distribución.

A Hidden Markov Model of credit quality

Algoritmo EM (2)

En general, supongamos que en cada realización del experimento aleatorio se observa un parámetro $\boldsymbol{z_i}$ y existe un parámetro oculto $\boldsymbol{x_i}$.

Denotamos entonces:

$Z = \{z_1 , ….. , z_m\}$ al conjunto de datos observados en $\boldsymbol{m}$ realizaciones del experimento.

$X = \{x_1 , ….. , x_m\}$ al conjunto de datos **no** observados.

y

$Y = Z \mathbf{U} X$ al conjunto de datos completos

Los datos **X** pueden considerarse una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad depende de los parámetros a estimar $\boldsymbol{\theta}$ y de los datos observados **Z.**

A Hidden Markov Model of credit quality

Algoritmo EM (3) Y = Z **U** X

De la misma forma **Y** es una variable aleatoria ya que esta definida en términos de la variable aleatoria **X.**

Llamemos ***h*** a la hipótesis actual de los valores de los parámetros **θ,** y ***h'*** la hipótesis revisada que se estima en cada iteración del algoritmo EM.

El algoritmo EM busca la hipótesis ***h'*** que maximiza la esperanza ***E*[ln *p*(Y | *h'*)]**, siendo ***p*(Y | *h'*)** la distribución de probabilidad que define **Y** y que depende de los parámetros desconocidos **θ.**

Esta distribución de probabilidad define la verosimilitud de los datos completos **Y** dada una hipótesis ***h'*** de los parámetros ocultos. *Al maximizar el logaritmo de la distribución se está maximizando la verosimilitud.*

A Hidden Markov Model of credit quality

Algoritmo EM (4)

Se introduce el valor esperado ***E*[ln *p*(Y | h')]**, debido a que el conjunto completo de datos **Y** es una variable aleatoria.

Dado que el conjunto completo de datos **Y** contiene datos **X** no observados, se deben considerar todos los posibles valores de **X**, ponderándolos según su probabilidad.

En otras palabras, se calcula el valor esperado ***E*[ln *p*(Y | h')]** sobre la distribución de probabilidad que gobierna la variable aleatoria **Y**. Esta distribución esta determinada por los valores observados **Z** más por la distribución de los valores no observados **X**.

En general, se desconoce la distribución de **Y**, porque está determinada por los parámetros **θ** que se intentan estimar.

A Hidden Markov Model of credit quality

Algoritmo EM (5)

Por lo anterior el algoritmo EM usa la hipótesis actual ***h*** para estimar la distribución **Y**.

Se define entonces una función **Q(*h*|*h'*)** que proporciona ***E*[ln *p*(Y | *h'*)]** como una función de *h'*, bajo la suposición de que **θ = *h*** y dada el conjunto de observaciones **Z** del conjunto completo de datos **Y**

$$Q(h|h') = E[\ln p(Y \mid h') \mid h, Z]$$

En la función **Q(*h*|*h'*)** se supone que la hipótesis ***h*** y los datos observados **Z** tienen unos valores fijos y que éstos definen la distribución de probabilidad de la variables ocultas **X** (y por tanto, sus valores esperados).

A Hidden Markov Model of credit quality

Algoritmo EM (6) $Q(h|h') = E[\ln p(Y \mid h') \mid h, Z]$

La distribución de probabilidad de **Y** definida por ***Z*** y ***h*** es, entonces, la que se utiliza para calcular $\boldsymbol{E[\ln p(Y \mid h')]}$ para una hipótesis cualquiera ***h***'.

En su forma general, el algoritmo EM repite la siguiente pareja de pasos hasta que converge.

Paso 1: Paso de estimación (E) : Calcular $\boldsymbol{Q(h|h')}$ utilizando la hipótesis actual ***h*** y los datos observados ***Z*** para estimar la distribución de probabilidad **Y**.

$$Q(h|h') \leftarrow E[\ln p(Y \mid h') \mid h, Z]$$

Paso 2: Paso de maximización (M) : Sustituir ***h*** por la hipótesis ***h'*** que maximiza la función **Q**

$$h \leftarrow \arg\max_{h'} Q(h'|h)$$

A Hidden Markov Model of credit quality

El Modelo Oculto de Markov

El objetivo es estimar, a partir de clasificaciones de crédito publicadas, la evolución de la calidad de crédito "verdadera" en el tiempo.

Se Toma la "verdadera" calidad de crédito a ser representada por una cadena de Markov $\{\mathbf{X}_k\}_{k \in N}$ con estados $\mathbf{S}=\{\mathbf{1, 2, \ldots, N}\}$, donde cada estado representa una categoría de calidad de crédito diferente. Se supone que la matriz de transición de X es $\mathbf{A=(a_{ij})_{1<=ij<=N}}$

Sin perder la generalidad, se identifican los elementos de **S** como los vectores unitarios estándar

$(e_1,e_2, \ldots ,e_N)$, $ei=(0,\ldots 0,1,0\ldots,0)' \in R^N$ y define la (i,j)-décima entrada de **A** como $\mathbf{a_{ji}=P(X_{k+1}=e_j | X_{k=}e_i)}$

La dinámica de **X** esta dada por $\mathbf{X_{k+1}=AX_k + V_{k+1}}$, k=0,1,…. Donde $\mathbf{V_{k+1}}$ es un incremento Martingale con $\boldsymbol{E[V_{k+1} | f_k] = 0} \in R^N$ and $\{\boldsymbol{f_k}\}$ es una filtración completa generada por **X**.

A Hidden Markov Model of credit quality

El Modelo Oculto de Markov (2) $X_{k+1}=AX_k + V_{k+1}$

Suponiendo que NO se observa **X** directamente. Por el contrario, se observa un proceso **Y** con los estados $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_j=(0,\ldots 0,1,0\ldots,0)' \in R^M$.

Se define una nueva matriz $\mathbf{C=(c_{ij})}$ donde $\mathbf{c_{ji}=P(Y_k=f_j \mid X_k=e_i)}$, $\mathbf{1<=i<=N}$ $\mathbf{1<=j<=M}$

Entonces, $\boldsymbol{E}[\mathbf{Y_k} \mid \boldsymbol{X_k}] = \mathbf{CX_k}$ y si se define $W_k=Y_k-CX_k$, se tiene

$\boldsymbol{E}[\mathbf{W_k} \mid \boldsymbol{g}_{\mathbf{k-1}}\ \mathbf{v}\ \{\mathbf{X_k}\}] = \mathbf{0} \in R^N$, entonces $\mathbf{W_k}$ es un incremento Martingale. La dinamica de Y entonces puede ser escrita como:

$$\mathbf{Y_k=CX_k+W_k}.$$

Aquí $\{\boldsymbol{g}_\mathbf{k}\}$ es la filtración completa generada por ambos procesos **X** y **Y**.

En el trabajo, la observación **Y** esta representada por las clasificaciones de crédito publicadas.

A Hidden Markov Model of credit quality

El Modelo Oculto de Markov (3)

Hidden Markov Model (HMM). *Under a probability measure* P,

$$X_{k+1} = AX_k + V_{k+1} \quad (\textit{signal equation, ' true' credit quality}), \tag{1}$$
$$Y_k = CX_k + W_k \quad (\textit{observation equation, posted rating}), \tag{2}$$

A and C are matrices of transition probabilities whose entries satisfy $\sum_{j=1}^{N} a_{ji} = 1$, $a_{ji} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{M} c_{ji} = 1$, $c_{ji} \geqslant 0$.

V_k *and* W_k *are martingale increments satisfying*

$$\mathrm{E}[V_{k+1}|\mathscr{F}_k] = 0, \quad Var\, V_k = \mathrm{diag}(Ap_{k-1}) - A\,\mathrm{diag}(p_{k-1})A', \tag{3}$$
$$\mathrm{E}[W_{k+1}|\mathscr{G}_k \vee \{X_{k+1}\}] = 0, \quad Var\, W_k = \mathrm{diag}(Cp_k) - C\,\mathrm{diag}(p_k)C', \tag{4}$$

where $p_k = (p_1, \ldots, p_N)' = \mathrm{E}[X_k]$, *with* $p_{k+1} = Ap_k = A^{k+1}p_0 \in \mathbb{R}^N$.

Expressions (11)–(13) can be used to estimate the parameters of the model. Using the filter-based EM algorithm as described in Elliott et al. (1995), the transition probabilities in matrix A are estimated as

$$\hat{a}_{ji} = \frac{\sigma(J^{ij})_k}{\sigma(O^i)_k}, \tag{14}$$

and the probabilities in matrix C as

$$\hat{c}_{ji} = \frac{\sigma(T^{ij})_k}{\sigma(O^i)_k + (M\sum_{s=1}^{M} c_{si}\langle Y_k, f_s\rangle)\langle Aq_{k-1}, e_i\rangle}. \tag{15}$$

A Hidden Markov Model of credit quality

El Modelo Oculto de Markov (4)

Appendix A. Standard & Poor's transition matrix with *NR*

Source: Table 3 in Lando and Skødeberg (2002). The one-year transition matrix estimated from continuous data over the period 1988–1998.

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.900	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000
AA	0.064	0.879	0.013	0.002	0.001	0.002	0.000	0.000	0.000
A	0.009	0.076	0.894	0.048	0.009	0.002	0.005	0.000	0.000
BBB	0.001	0.006	0.044	0.848	0.087	0.008	0.002	0.000	0.001
BB	0.002	0.001	0.005	0.039	0.730	0.064	0.022	0.000	0.001
B	0.000	0.000	0.001	0.006	0.061	0.673	0.067	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.001	0.008	0.053	0.382	0.000	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.044	0.376	1.000	0.004
NR	0.025	0.032	0.042	0.055	0.097	0.152	0.143	0.000	0.994

Recall from Section 2 that an entry of the transition matrix is defined as $a_{ji} = \mathrm{P}(X_{k+1} = e_j | X_k = e_i)$.

Appendix B. Initial matrix *C*

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.500	0.200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.400	0.500	0.200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.200	0.500	0.200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
BBB	0.000	0.000	0.200	0.500	0.200	0.000	0.000	0.000	0.000
BB	0.000	0.000	0.000	0.200	0.500	0.200	0.000	0.000	0.000
B	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	0.500	0.200	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	0.500	0.400	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	0.500	0.000
NR	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	1.000

Recall from Section 2 that an entry of the matrix C is defined as $c_{ji} = \mathrm{P}(Y_k = f_j | X_k = e_i)$.

A Hidden Markov Model

Estimation step 1.

Estimated matrix A:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.763	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
AA	0.068	0.750	0.009	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
A	0.011	0.077	0.769	0.042	0.007	0.002	0.004	0.000	0.000
BBB	0.001	0.005	0.035	0.683	0.062	0.005	0.001	0.000	0.000
BB	0.002	0.001	0.004	0.031	0.513	0.040	0.016	0.000	0.000
B	0.000	0.000	0.001	0.005	0.040	0.394	0.046	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.023	0.194	0.000	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.017	0.169	1.000	0.001
NR	0.155	0.162	0.182	0.237	0.371	0.518	0.568	0.000	0.999

Aggregate variance matrix $Var\ V_k$:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	14.420	−9.098	−1.306	−0.110	−0.271	−0.048	−0.139	−0.150	−3.312
AA	−9.098	26.777	−11.438	−1.110	−0.265	−0.284	−0.036	−0.046	−4.490
A	−1.306	−11.438	34.154	−11.689	−1.878	−0.555	−0.354	−0.345	−6.576
BBB	−0.110	−1.110	−11.689	38.568	−14.105	−2.383	−0.364	−0.327	−8.493
BB	−0.271	−0.265	−1.878	−14.105	46.850	−12.966	−2.576	−2.269	−12.520
B	−0.048	−0.284	−0.555	−2.383	−12.966	50.364	−8.999	−8.005	−17.124
CCC	−0.139	−0.036	−0.354	−0.364	−2.576	−8.999	42.795	−21.132	−9.196
D	−0.150	−0.046	−0.345	−0.327	−2.269	−8.005	−21.132	41.723	−9.449
NR	−3.312	−4.490	−6.576	−8.493	−12.520	−17.124	−9.196	−9.449	71.160

Estimated matrix C:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.030	0.010	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.232	0.233	0.078	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.164	0.345	0.149	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
BBB	0.000	0.000	0.078	0.212	0.086	0.000	0.000	0.000	0.000
BB	0.000	0.000	0.000	0.100	0.254	0.108	0.000	0.000	0.000
B	0.000	0.000	0.000	0.000	0.113	0.301	0.162	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.023	0.021	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.033	0.094	0.000
NR	0.738	0.593	0.498	0.539	0.547	0.584	0.782	0.886	1.000

Aggregate variance matrix $Var\ W_k$:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	26.606	−40.181	−5.561	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−9.350
AA	−40.181	58.878	−29.002	−6.040	0.000	0.000	0.000	0.000	−15.227
A	−5.561	−29.002	49.547	−29.486	−5.755	0.000	0.000	0.000	−13.208
BBB	0.000	−6.040	−29.486	48.079	−26.871	−4.994	0.000	0.000	−12.710
BB	0.000	0.000	−5.755	−26.871	43.279	−24.196	−4.685	0.000	−11.462
B	0.000	0.000	0.000	−4.994	−24.196	41.786	−18.148	−2.574	−9.640
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	−4.685	−18.148	1.708	−47.836	−13.840
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−2.574	−47.836	61.737	−11.637
NR	−9.350	−15.227	−13.208	−12.710	−11.462	−9.640	−13.840	−11.637	97.074

A Hidden Markov Model of credit quality

Estimation step 15.

Estimated matrix A:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.736	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
AA	0.079	0.691	0.008	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
A	0.017	0.077	0.672	0.030	0.004	0.001	0.007	0.000	0.000
BBB	0.001	0.006	0.035	0.625	0.052	0.005	0.003	0.000	0.000
BB	0.005	0.001	0.004	0.034	0.552	0.048	0.043	0.000	0.000
B	0.000	0.001	0.001	0.005	0.047	0.529	0.135	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.024	0.335	0.000	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.013	0.203	1.000	0.000
NR	0.161	0.220	0.279	0.304	0.338	0.379	0.274	0.000	1.000

Aggregate variance matrix $Var\,V_k$:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.338	−0.071	−0.013	−0.001	−0.004	0.000	0.000	0.000	−0.250
AA	−0.071	0.359	−0.058	−0.005	−0.001	0.000	0.000	0.000	−0.224
A	−0.013	−0.058	0.308	−0.026	−0.003	−0.001	0.000	0.000	−0.208
BBB	−0.001	−0.005	−0.026	0.170	−0.012	−0.002	0.000	0.000	−0.125
BB	−0.004	−0.001	−0.003	−0.012	0.131	−0.005	−0.001	0.000	−0.106
B	0.000	0.000	−0.001	−0.002	−0.005	0.049	−0.001	−0.001	−0.040
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.001	−0.001	0.003	0.000	−0.001
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.001	0.000	0.399	−0.397
NR	−0.250	−0.224	−0.208	−0.125	−0.106	−0.040	−0.001	−0.397	1.351

Estimated matrix C:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.398	0.187	0.023	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.000	0.246	0.390	0.127	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
BBB	0.000	0.000	0.072	0.232	0.096	0.000	0.000	0.000	0.000
BB	0.000	0.000	0.000	0.115	0.382	0.168	0.000	0.000	0.000
B	0.000	0.000	0.000	0.000	0.144	0.536	0.542	0.000	0.000
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.001	0.000
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.149	0.068	0.000
NR	0.602	0.567	0.515	0.526	0.378	0.296	0.305	0.931	1.000

Aggregate variance matrix $Var\,W_k$:

	AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*D*	*NR*
AAA	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
AA	0.000	0.283	−0.028	−0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.270
A	0.000	−0.028	0.271	−0.022	−0.004	0.000	0.000	0.000	−0.261
BBB	0.000	−0.001	−0.022	0.079	−0.012	−0.002	0.000	0.000	−0.067
BB	0.000	0.000	−0.004	−0.012	0.043	−0.012	0.000	0.000	−0.048
B	0.000	0.000	0.000	−0.002	−0.012	0.023	0.000	0.000	−0.022
CCC	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.006	−0.127
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.006	9.929	−9.941
NR	0.000	−0.270	−0.261	−0.067	−0.048	−0.022	−0.127	−9.941	10.736